EPREUVES ECRITES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment.

On rappelle que :

— une permutation d'un ensemble Ω est une bijection de Ω sur Ω;

— si Γ est un sous-groupe du groupe des permutations de Ω, une partie Ω' de Ω est dite stable sous Γ, si $\gamma(\Omega')$ est contenue dans Ω' pour tout $\gamma \in \Gamma$;

— si K est un groupe multiplicatif d'élément unité e, u un élément de K et n le plus petit nombre entier strictement positif, s'il existe, tel qu'on ait $u^n = e$, alors u est dit d'ordre n.

Deux éléments u, v (resp. deux sous-groupes U, V) de K sont dits conjugués dans K s'il existe au moins un élément s de K tel qu'on ait $v = sus^{-1}$ (resp. tel que la permutation $x \longmapsto sxs^{-1}$ de K applique U sur V); la relation ainsi définie est une relation d'équivalence sur K (resp. sur l'ensemble des sous-groupes de K) dont les classes sont appelées classes de conjugaison (resp. classes de conjugaison de sous-groupes) de K.

I

Dans toute cette première partie, E désigne un espace affine réel de dimension 3, O un point de E et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace vectoriel $\vec{E}$ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, où A et B parcourent E. Une droite (resp. un plan) est une variété linéaire affine de E de dimension 1 (resp. 2). On dira qu'une droite D *s'appuie* sur une droite D' si D et D' sont contenues dans un même plan.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on notera L_α la droite de direction

$$-\sin\alpha\, \vec{i} + \cos\alpha\, \vec{j} + \vec{k}$$

contenant le point A déterminé par

$$\overrightarrow{OA} = \cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j}.$$

Dans les exemples faisant intervenir de telles droites L_α, $\vec{E}$ sera supposé orienté et muni d'une structure euclidienne telle que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit orthonormée et directe.

On appellera *triplexe* toute suite $\mathfrak{D} = (D, D', D'')$ de trois droites satisfaisant aux conditions suivantes :

a. Les trois droites ne sont pas parallèles à un même plan;

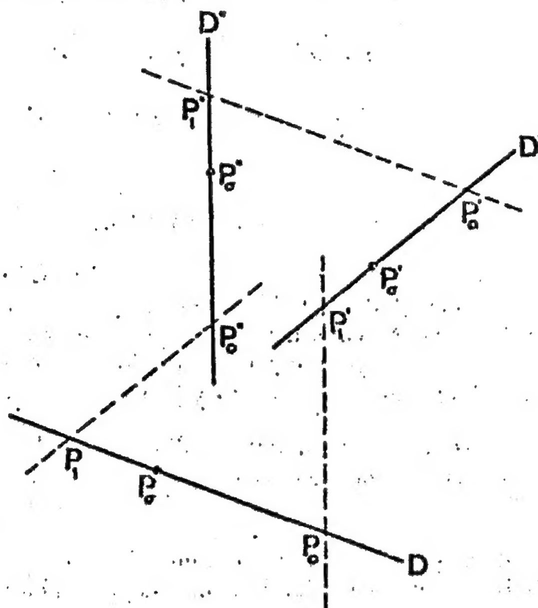
b. Deux quelconques d'entre elles ne s'appuient pas l'une sur l'autre.

Dans la suite, on suppose donné un triplexe $\mathcal{D} = (D, D', D'')$.

1° *a.* Soit σ un nombre réel. Établir, pour tout σ différent de 0 et 1, l'existence sur D d'un point unique P_σ tel que la droite passant par P_σ et s'appuyant sur D' et D'' coupe D' et D'' en des points M' et M'' vérifiant la relation :

$$\overrightarrow{OP_\sigma} = (1-\sigma)\,\overrightarrow{OM'} + \sigma\,\overrightarrow{OM''}$$

Montrer que, lorsque σ tend vers 0 (resp. vers 1), P_σ tend vers un point limite P_0 (resp. P_1).



b. On définit de même des points $P'_\sigma \in D'$ et $P''_\sigma \in D''$ par permutation circulaire de D, D', D'' (voir figure). Que peut-on dire du lieu géométrique $\mathfrak{L}(\mathcal{D})$ des centres de gravité des triangles $P_\sigma\, P'_\sigma\, P''_\sigma$ quand σ décrit R?

c. Déterminer P_σ, P'_σ, P''_σ et $\mathfrak{L}(\mathcal{D})$ lorsque $\mathcal{D}$ est le triplexe $\mathcal{L} = (L_0, L_\omega, L_{2\omega})$ où l'on pose $\omega = \frac{2\pi}{3}$.

2° Si $\mathcal{C} = (C, C', C'')$ est un autre triplexe, montrer qu'il existe une permutation affine f de E et une seule telle qu'on ait :

$$f(C) = D, \quad f(C') = D', \quad f(C'') = D''$$

3° Soit $\Gamma(\mathcal{D})$ le groupe des permutations affines f de E telles qu'on ait :

$$f(D) \cup f(D') \cup f(D'') = D \cup D' \cup D''$$

Soit d'autre part F l'ensemble $\{P_\sigma, P'_\sigma, P''_\sigma\}$ pour $\sigma = \frac{1}{2}$.

a. Montrer qu'on a $f(F) = F$ pour tout $f \in \Gamma(\mathcal{D})$. Si f' désigne la permutation de F induite par f, montrer que l'application $f \longrightarrow f'$ est un isomorphisme de $\Gamma(\mathcal{D})$ sur le groupe des permutations de F.

b. Montrer que $\Gamma(\mathcal{L})$ est formé de rotations de E dont on déterminera les axes et les angles.

c. Combien y a-t-il de points, de droites, de plans de E stables sous $\Gamma(\mathcal{D})$? Préciser ces points, droites et plans lorsque $\mathcal{D} = \mathcal{L}$.

4° *a.* Soit $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ le lieu géométrique des droites s'appuyant sur D, D' et D". Déterminer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une équation de $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ dans les deux cas suivants :

α. $\quad D = \{ m \mid \overrightarrow{Om} = \lambda\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \lambda \in \mathbf{R} \}$

$\quad D' = \{ m' \mid \overrightarrow{Om'} = \vec{i} + \lambda'\vec{j} - \vec{k}, \quad \lambda' \in \mathbf{R} \}.$

$\quad D'' = \{ m'' \mid \overrightarrow{Om''} = -\vec{i} + \vec{j} + \lambda''\vec{k}, \quad \lambda'' \in \mathbf{R} \}$

β. $\quad \mathcal{D} = \mathcal{L}$

Déterminer les droites contenues dans $\mathcal{H}(\mathcal{L})$.

b. Soit $\mathcal{H}$ un hyperboloïde à une nappe de E et $G(\mathcal{H})$ le groupe des permutations affines f de E telles qu'on ait $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Montrer que, pour toute droite C contenue dans $\mathcal{H}$ et pour tout élément τ d'ordre 3 de $G(\mathcal{H})$, $(C, \tau(C), \tau^2(C))$ est un triplexe. En déduire que les éléments d'ordre 3 de $G(\mathcal{H})$ sont deux à deux conjugués dans $G(\mathcal{H})$.

c. Soit $\mathfrak{S}$ le groupe des permutations d'un ensemble à trois éléments. Déterminer les classes de conjugaison de sous-groupes de $G(\mathcal{H})$ isomorphes à $\mathfrak{S}$.

d. Si Γ est un groupe de permutations affines de E isomorphe à $\mathfrak{S}$, montrer l'existence d'hyperboloïdes à une nappe stables sous Γ.

Exbrayat
927

II

Pour tout couple (m, n) d'entiers strictement positifs, on note $\mathcal{M}(m, n)$ l'espace des matrices réelles à m lignes et n colonnes. Pour tout $a \in \mathcal{M}(m, n)$, on désigne par a_{ij} l'élément de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de a, et par ${}^t a$ la matrice transposée de a : ${}^t a \in \mathcal{M}(n, m)$ et $({}^t a)_{ij} = a_{ji}$. Pour $m = n$, $\det(a)$ est le déterminant de a.

Dans cette seconde partie $\vec{E}$ est l'espace vectoriel réel des matrices symétriques de $\mathcal{M}(2, 2)$. On désigne par SL_2 le groupe (pour la multiplication matricielle) des matrices $g \in \mathcal{M}(2,2)$ telles qu'on ait : $\det(g) = 1$. Pour tout $g \in SL_2$, on note $\varphi(g)$ l'endomorphisme de $\vec{E}$ tel qu'on ait : $\varphi(g)(s) = gs\,{}^t g$ pour tout $s \in \vec{E}$; on a donc : $\det(\varphi(g)(s)) = \det(s)$.

1° *a.* Soit :

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2$$

Déterminer la matrice $M(g)$ de $\varphi(g)$ dans la base

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\vec{E}$. Que peut-on dire de $M(g)$ dans le cas :

$$\alpha = \delta = \cos\theta, \quad \gamma = -\beta = \sin\theta, \quad \theta \in \mathbf{R} \ ?$$

b. Déterminer dans cette même base la matrice J de la forme quadratique

$$- \det : s \longrightarrow - \det(s) \qquad \text{où } s \text{ parcourt } \vec{E}$$

c. Soit G le groupe (pour la multiplication matricielle) des matrices $a \in \mathfrak{M}(3,3)$ telles qu'on ait ${}^t a \, J a = J$, G' la partie de G formée des matrices a pour lesquelles a_{33} est strictement positif, et Π l'ensemble des $xu + yv + zw \in \vec{E}$ vérifiant les relations :

$$x, y, z \in \mathbf{R} \quad , \quad x^2 + y^2 - z^2 < 0 \quad \text{et} \quad z > 0$$

Montrer que G' est un sous-groupe distingué de G et que Π est stable sous le groupe des automorphismes de $\vec{E}$ dont la matrice dans la base (u, v, w) est élément de G'.

d. Soit G_0 la partie de G formée des matrices a telles qu'on ait $\det(a) = 1$ et $a_{33} > 0$. Montrer que G_0 est un sous-groupe distingué de G, que le groupe-quotient G/G_0 est isomorphe au groupe des isométries d'un rectangle, que $M(g)$ appartient à G_0 pour tout $g \in SL_2$, et que l'application $M : g \longrightarrow M(g)$ est un homomorphisme de SL_2 dans G_0, dont on déterminera le noyau.

2° *a.* Soit $\mathcal{H}$ la partie de $\vec{E}$ formée des $xu + yv + zw$ tels qu'on ait $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Montrer que $\mathcal{H}$ est sa propre image par un endomorphisme de $\vec{E}$ de matrice a dans la base (u, v, w), si et seulement si a appartient à G.

b. Soit $p : SL_2 \longrightarrow \vec{E}$ l'application telle qu'on ait

$$p(g) = \varphi(g)(v) \qquad \text{pour tout } g \in SL_2.$$

Déterminer $p(g)$ pour : $g = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathbf{R}$.

Montrer qu'on a $p(SL_2) = \mathcal{H}$.

c. Déterminer le sous-groupe G_1 de G_0 formé des matrices a telles qu'on ait ;

$$a_{12} = a_{32} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{22} = 1$$

Déterminer le sous-groupe $M^{-1}(G_1)$ de SL_2 et montrer l'égalité

$$M\left(M^{-1}(G_1)\right) = G_1.$$

d. Montrer qu'on a $M(SL_2) = G_0$.

e. Montrer que le sous-groupe G' de G, défini dans II-1° *c.*, est isomorphe au groupe des homographies de la droite projective réelle.

3° *a.* Déterminer les classes de conjugaison de SL_2.

b. On considère les matrices suivantes de G_0 :

$$A(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} , \quad t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad B(\eta) = \begin{pmatrix} \cos\eta & -\sin\eta & 0 \\ \sin\eta & \cos\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad 0 < \eta < 2\pi$$

Montrer que les classes de conjugaison de ces matrices dans G_0 sont toutes distinctes et qu'il y a exactement deux classes de conjugaison de G_0 ne contenant aucune matrice $A(t)$ ou $B(\eta)$.

c. Déterminer les classes de conjugaison de G.

d. Déterminer le nombre des classes de conjugaison de G_0 et de G formées d'éléments d'ordre 3.

4° *a.* Montrer que tout élément de SL_2 est le produit d'un nombre fini de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

b. Montrer que G_0 ne contient aucun sous-groupe distingué autre que G_0 et le sous-groupe réduit à l'élément unité.